Solution 4 :

A- 1°/ a) φ est définie, continue et dérivable sur **R** et $\forall x \in \mathbf{R}$:

$\varphi'(x) = e^x(2-x) - e^x = e^x(1-x)$

* $\lim\limits_{x\to-\infty} \varphi(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} 2e^x - xe^x - 2 = -2$

x	$-\infty$		0		1		a		$+\infty$
$\varphi'(x)$		+		+	0	−		−	
$\varphi(x)$	-2	↗	(-)	↗	e-2	↘	(+)	↘	$-\infty$

b)* φ est continue et strictement croissante sur $]-\infty,1]$ donc la restriction de φ sur $]-\infty,1]$ est une bijection de $]-\infty,1]$ sur $]-2,e-2]$ et comme $0 \in]-2,e-2]$ donc 0 admet un seul antécédent par cette bijection. En remarquant que $\varphi(0)=0$ donc l'équation $\varphi(x)=0$ admet 0 comme unique solution sur $]-\infty,1]$.

* De même, φ est continue et strictement décroissante sur $[1,+\infty[$ donc la restriction de φ sur $[1,+\infty[$ est une bijection de $[1,+\infty[$ sur $]-\infty,-2]$ ce qui prouve que l'équation $\varphi(x)=0$ admet une seule solution sur $[1,+\infty[$ or $\varphi(1) = e-2$ et $\varphi(2) = -2 \Rightarrow \varphi(1).\varphi(2) < 0$.

donc d'après le théorème des valeurs intermédiaires : $1 < a < 2$

c) D'après le tableau des variations de φ on a :

* $\forall x \in]-\infty,0[\cup]a,+\infty[; \varphi(x) < 0$

* $\forall x \in]0,a[; \varphi(x) > 0$

2°/ a) * La fonction $x \mapsto \dfrac{x^2}{e^x - 1}$ est continue sur $\mathbf{R}^*$ comme quotient de deux fonctions continues sur $\mathbf{R}^*$

* ***Etudions la continuité de f en*** 0

* $\lim\limits_{x\to0} f(x) = \lim\limits_{x\to0} \dfrac{x^2}{e^x-1} = \lim\limits_{x\to0} x.\dfrac{1}{\dfrac{e^x-1}{x}} = 0.1 = 0$ car $\lim\limits_{x\to0} \dfrac{e^x-1}{x} = 1$